

PROCESSOS DE MATEMATIZAÇÃO

GUY BROUSSEAU - Assistente na
Faculdade de Ciências de
Bordeaux

G. BROUSSEAU

Assistente da Faculdade de Ciências- Bordeaux

Queremos precisar qual é o processo pedagógico que julgamos indispensável para obter um bom conhecimento da matemática. Ele serviu-nos de modelo para organizar a maior parte das lições e das séries de actividades de que falámos em (9) (ver a bibliografia) e é indispensável para compreender o método e para indicar como é possível conciliar princípios pedagógicos que estudos superficiais apresentam como inconciliáveis.

A pedagogia tende a organizar as relações da criança com o seu meio de modo a fazer intervir comportamentos adquiridos com vista à criação de comportamentos novos.

1. ESTRUTURAS - SITUAÇÃO - MODELOS

A estrutura de um conjunto é definida pelas relações e pelas operações que ligam os seus elementos. Se a lista de relações que define uma estrutura S_1 está contida na lista que define S_2 , diremos que S_2 implica logicamente S_1 , que S_2 realiza S_1 , ou ainda que S_1 é uma abstracção ou um modelo de S_2 .

Duas estruturas S_a e S_b podem ser realizações diferentes de uma mesma estrutura S ; diremos que S_a é uma representação, módulo S , de S_b . Inversamente uma mesma estrutura pode implicar logicamente duas estruturas diferentes. O conjunto das estruturas que realizam uma estrutura S é tanto mais vasto quanto mais geral é S .

Consideremos uma situação, quer dizer uma certa combinação de objectos (ou de pessoas), tendo certas relações entre eles. É por vezes cómodo, para descrever esta situação, escolher uma estrutura e estabelecer, entre certos dos seus elementos ou relações e os objectos ou relações da situação, correspondências de significado a significante. As partes da estrutura assim associadas a objectos da situação dizem-se concretamente significativas.

(1) Conferência pronunciada em Clermont-Ferrand nas Jornadas da A.P.M. em Maio de 1970, sob o título de "Aprendizagem das estruturas".

A estrutura é então uma linguagem permitindo falar da situação.

A correspondência "linguagem-situação" é arbitrária. Por um lado partes concretamente significativas desta estrutura implicam logicamente outras partes ou outras estruturas; por outro lado, na situação, certas relações descritas têm consequências: pode acontecer que as consequências na estrutura sejam concretamente significativas das consequências na situação. Então, a estrutura teria permitido conjecturas válidas.

Uma estrutura encarada numa certa situação como um meio de prognóstico, de explicação, com um projecto de extensão das partes concretamente significativas, constitui um modelo da situação.

Pode acontecer que nem todas as relações de um modelo matemático sejam susceptíveis de receber uma significação concreta na situação descrita: essas relações são ditas não pertinentes.

Pode acontecer também que não haja acordo entre uma consequência na situação e aquilo que o modelo previa. Este deve então ser rejeitado ou modificado.

2. MODELOS MENTAIS - ESQUEMA E DIALECTICA PEDAGÓGICAS

É interessante usar o vocabulário indicado para descrever as situações pedagógicas.

Num dado instante a criança é colocada perante uma certa situação: quer dizer perante certos objectos ou pessoas que tem entre elas certas relações. Além disso há entre ela e esta situação certas relações:

- recebe informações e sanções -

e pode reagir por acções: actividade física, emissão de mensagens, tomada de posição ou julgamento.

Quando uma criança, numa sucessão de situações comparáveis (que realizam uma mesma estrutura) tem uma sucessão de comportamentos comparáveis (que relevam de um mesmo comportamento) está-se autorizado a supor que ela se apercebeu de um certo número de elementos e de relações desta estrutura. Tem então pelo menos um certo modelo mental desta situação.

Num dado momento, as relações da criança com o mundo que a rodeia constitui uma situação. Se esta situação tiver sido aceite ou organizada por um pedagogo como um meio de atingir um comportamento previsto, chamá-la-emos de situação ou esquema pedagógico.

Mas uma situação não é estática; evolue no tempo, na sequência de trocas sucessivas de informações e acções entre o sujeito e a situação. Estas permutas constituem uma espécie de diálogo tendente à obtenção de uma

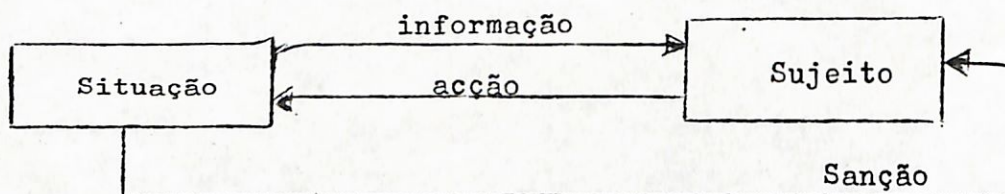
certa satisfação (diálogo entre o objecto e o sujeito, do concreto e do abstracto, do "à priori e do à posteriori"...). No decurso destas trocas, a criança modifica a sua primeira ideia da situação, cria e experimenta um comportamento, um modelo mental, uma linguagem, ou uma teoria. É um processo dialectico. Chamaremos dialéctica pedagógica uma sequência de esquemas pedagógicos ligados à mesma situação ou a um mesmo modelo mental.

3.

DIALÉCTICA DA ACÇÃO

a) Esquema da acção

A criança está colocada em face de uma certa situação, de que possui modelos mentais mais ou menos satisfatórios. Estes modelos permitem-lhe interpretar, receber informações sobre esta situação. Há de resto um fim, ou uma motivação para agir fisicamente, pelo menos certas informações que recebe, ou que pode receber, são apercebidas de maneira afectiva, quer dizer como reforços ou sanções resultantes da sua acção.

b) Dialéctica

Agindo, a criança vai melhorar ou piorar a sua posição, ela julgará ter-se aproximado do seu objectivo ou ter-se afastado dele, assim o modelo utilizado será reforçado ou abandonado. O indivíduo adapta-se por um processo de tentativa e erro. Os métodos de modificação ou de mudança de modelos são mal conhecidos. É necessário, todavia notar que estas mudanças são orientadas unicamente pelas sanções e sua intensidade.

Observa-se no decurso de certas séries de acções conseguidas que os modelos vão empobrecendo; o indivíduo procura menos informação, não retém senão a que é pertinente para o resultado procurado: há redução e abstracção por uma espécie de princípios de economia do modelo. Pelo contrário, no decurso de séries de acções que fracassam, a criança tende a enriquecer o modelo, precisa-o, concretisa-o, torna-o capaz de dar conta de uma maior quan-

tidade de informação até que seja obrigado a abandoná-lo.

c) Filiação das estruturas

As estruturas mais gerais são aquelas que serão realizadas no maior número de modelos e as que terão a possibilidade de maior número de vezes ser úteis. Se se admite que a frequência de utilização de um modelo é uma circunstância favorável à sua elaboração, deve admitir-se que as estruturas mais gerais são aquelas que as crianças adquirirão primeiro. É o que se observa na dialéctica da acção.

Pôs-se também em evidência uma certa ordem de aparição na criança, dos modelos mentais, e mostrou-se que um modelo só podia ser eficaz e familiarmente utilizado quando estivesse ligado a uma estrutura ou a uma família de estruturas já adquiridas ou em curso de aquisição. Esta condição parece estar ligada à dialéctica da acção: a criança deve poder operar sobre o seu modelo um certo jogo de modificações. Um modelo particular adquirido unicamente por aprendizagem não é instrumental e não pode ser adaptado.

d) Modelos implícitos

A dialéctica da acção leva à criação pelo sujeito de modelos implícitos que regulam esta acção: trata-se da associação de certos estímulos a certas respostas.

Se a criança possui uma linguagem apropriada, pode explicitar certos destes modelos. Um observador pode explicitar mais alguns, mas restam, sem dúvida processos, métodos de pesquisa atribuídos à intuição que fazem com que alguns tenham êxito regularmente e outros fracassem também regularmente, e estes métodos não são explicitáveis.

4. DIALÉCTICA DA FORMULAÇÃO

Por abuso temos confundido os modelos mentais explicitáveis com os modelos matemáticos: estes são explicitados numa linguagem muito particular. Para que apareça objectivamente o que chamamos "matemática", a criança deve exprimir, a propósito de uma situação, informações pertinentes numa linguagem convencional de que conhece ou cria as regras: não basta que a criança colocada perante uma situação tenha o desejo e a possibilidade de a modificar,

é preciso que construa uma descrição, uma representação, um modelo explícito.

a) Esquemas da formulação

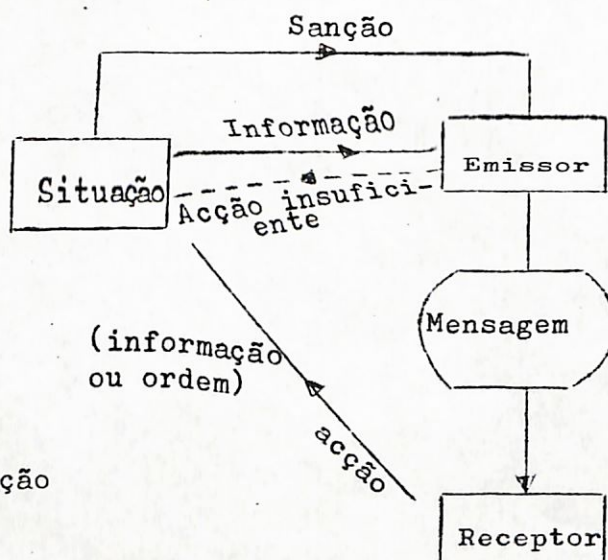
Se queremos que a criação de um modelo explícito siga o nosso esquema pedagógico de base, é preciso que este modelo tenha utilidade para a obtenção de um resultado; todos os esquemas se reduzem ao seguinte: a criança pode obter sobre a situação certas informações, mas não consegue por si só obter o resultado esperado, seja porque as suas informações são incompletas, seja porque os seus meios de acção são insuficientes.

Se então dá conta de que uma outra pessoa é susceptível de agir sobre a situação de modo favorável, procura obter o seu concurso e depois troca com ela informações ou ordens: são as mensagens trocadas entre um "emissor" e um "receptor".

Diferentes esquemas da formulação

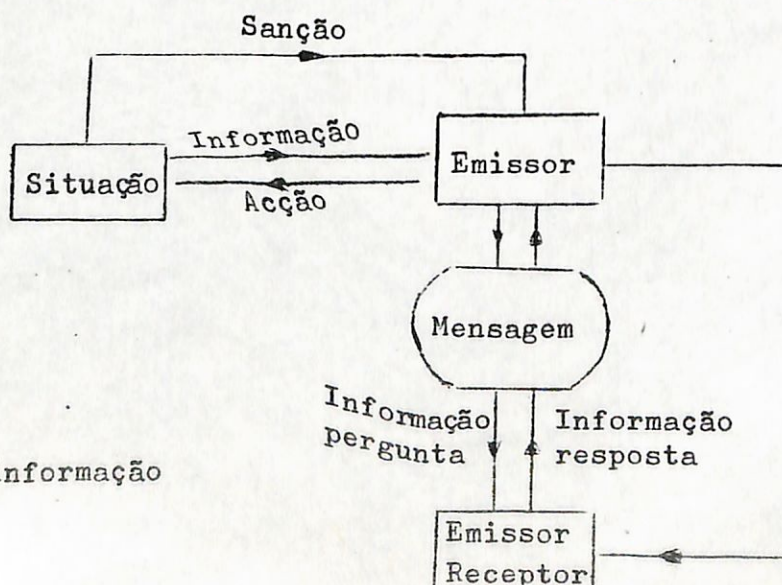
Esquema I

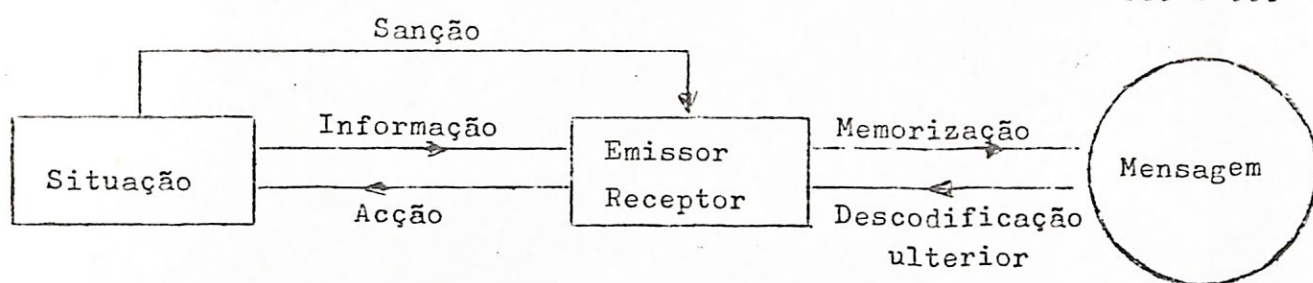
Acção de concertação



Esquema II

Procura de informação





Esquema III

Memorização

O esquema da formulação funciona da seguinte maneira: O receptor age em função da mensagem que recebeu. Se esta acção não é satisfatória, pode corrigi-la por uma nova troca de mensagens, mas a comunicação só se estabelece se o emissor e o receptor utilizam o mesmo código, e o utilizam bem um e outro. É necessário além disso evidentemente que o conteúdo da mensagem seja correcto.

Se o esquema pedagógico é correcto, quando a sanção da acção é negativa, inicia-se uma sucessão de correcções incidindo sobre as mensagens que conduzem à formulação procurada. Evidentemente o facto das mensagens serem escritas pode facilitar as correcções.

Demos em (9) e em outros trabalhos (7) numerosos exemplos de lições que realizam esquemas de formulação:

- Designação de objectos e de conjuntos .
- Igualdades .
- Designação das partes de um conjunto, operações com conjuntos.
- Criação de pares, conjunto-produto.
- Criação dos cardinais.
- Designação dos cardinais, de somas.
- Designação de vectores.
- Numeração, etc...

Este esquema funciona com regularidade.

As relações dos dois interlocutores com a situação permitem prever qual é a semântica - o conteúdo - das mensagens que permitirão a obtenção do resultado. As regras impostas ao canal da comunicação, e os conhecimentos dos dois sujeitos limitarão a escolha do reportório (querer dizer o conjunto de sinais formais que permitem suportar o sentido das mensagens trocadas) e da sintaxe utilizada (querer dizer as regras de construção da mensagem com a ajuda de sinais do reportório). É possível, combinando judi-

ciosamente uma situação e as condições de troca de mensagens, comandar o tipo de mensagem susceptível de ser criado. É necessário que, se a mensagem não passa (mal codificada ou mal compreendida) a acção não se possa concluir.

b) Condições sobre a comunicação

Uma mensagem, mesmo uma breve ordem necessária à realização de uma tarefa, contém forçosamente uma parte pertinente, concretamente significativa. Existem relações significante - significado, entre certos elementos da mensagem e outros da situação. Não se conhece um sistema de condições suficientes para que se possa falar de mensagem matemática, mas o facto de uma mensagem ser:

- escrita,
- sem ambiguidade,
- sem redundância (querer dizer não contendo várias vezes a mesma informação),
- sem informação superflua,
- minimal, no que concerne ao mesmo tempo à mensagem, ao reportório e à sintaxe,

parece, na maior parte dos casos em que a realizamos, própria para produzir a criação de mensagens quase matemáticas, quer dizer de modelos.

c) Dialéctica da formulação

Ela pode ter dois resultados pedagógicos distintos:

- A construção de uma nova mensagem com a ajuda de um reportório e de uma sintaxe conhecidos.
- A criação de um reportório, de uma sintaxe (e de mensagens) novos.

Observam-se nos dois casos os mesmos processos de tentativa e de erro, de redução, de extensão e de adaptação de mensagens ou de códigos.

- São os mesmos tipos de situações que os provocam.

- Esta redução pode conduzir a uma formalização, à criação de um modelo matemático explícito.

No primeiro caso, as crianças não trocam muitas informações sobre a linguagem que utilizam, seja a linguagem ordinária, os diagramas ou uma escrita formalizada. As regras de construção de mensagens e por conseguinte de modelos matemáticos podem continuar a ficar implícitas. Estamos ao nível de utilização familiar.

No segundo caso é mais frequente ver explicitar convenções de escrita.

Numa situação pedagógica, com crianças muito pequenas, nunca vi aparecer uma mensagem como uma simples estenografia da linguagem usual; havia sempre uma tentativa de tradução da estrutura matemática a transmitir. Pelo contrário parece-me que é necessário deixar também circular, na devida altura, mensagens orais: antes ou depois do jogo de comunicação não verbal previsto na situação.

d) Variantes das situações de comunicação

(ver fig. pag. 5)

1º . O aluno dirige a si próprio uma mensagem, seja por exemplo porque tem necessidade de reter elementos interessantes para os utilizar mais tarde, seja pelo simples desejo de expressão. Temos por vezes utilizado este esquema propondo "fases de actividade" seguidas de "fases de representação".

2º . O mestre é um dos interlocutores. É o esquema "ensinante"-
-"ensinado".

Não está nos nossos propósitos examinar as vantagens e os inconvenientes deste sistema, mas pode ser útil esboçar as principais deformações obtidas se um dos elementos do esquema não cumpre o seu papel:

- Sanções em virtude de finalidades que escapam à criança.
- Reportório imposto, limitado pelo receptor (mestre).
- Inexistência de situação concreta em face da qual a criança se sente empenhada só e pessoalmente.
- Inexistência de resposta do aluno: ensino dogmático.

- Inexistência de sanções, sanções sem relação com os modelos realmente utilizados pela criança, sanção unicamente da formulação, etc.

A situação é constituída unicamente por exercícios propostos ao aluno (ensino programado); o pedagogo prevê cada sequência; informação ao aluno, pergunta, resposta ao professor, sanção para o aluno. Isto supõe a prévia aquisição pela criança de uma linguagem e de esquemas lógicos pelo que o professor deve utilizar o reportório conhecido do aluno para transmitir o seu pensamento e fazê-lo aceitar.

NOTA IMPORTANTE

As relações da criança com a situação podem ser falseadas pelo jogo de motivações incorrectas, mesmo se a situação apresenta uma boa realização da estrutura a ensinar.

3º . Os dois interlocutores são alunos, ou melhor grupos de alunos. É o único caso no qual a dialéctica da formulação se pode desenvolver convenientemente, porque então a função semiótica é ao mesmo tempo estimulada e controlada de maneira poderosa e natural pelas relações das crianças no interior da classe. A matemática aprende-se, neste caso, como uma verdadeira linguagem, no respeito das possibilidades genéticas das crianças e da filiação dos seus sistemas de expressão e de justificações. Os progressos são todavia rápidos porque as situações incitam as crianças a ir buscar, em devida altura, as estruturas empregadas pelos adultos, sem permitir uma introdução forçada e prematura.

e) A importância do emprego dos modelos matemáticos

É claro que não há verdadeiramente aprendizagem da matemática sem o emprego pelo aluno de modelos explícitos, da linguagem e da escrita matemáticas. Esta linguagem e esta escrita não são utilizadas correntemente nem empregadas familiarmente nas relações naturais estabelecidas pela criança com o seu meio. Não há método natural para o ensino da matemática. Pelo contrário, se o professor poder multiplicar as ocasiões de utilizar modelos matemáticos e se se limitar a fornecer as convenções universais, pode organizar o processo de matematização. A precocidade e a frequência de emprego pela criança duma linguagem matemática pertinente e correcta são absolutamente capitais nestas aquisições.

5. DIALECTICA DA VALIDAÇÃO

a) Objecto

No decurso da dialectica da formulação, a construção das mensagens matemáticas leva-se a cabo segundo regras que são ainda implícitas para os dois interlocutores. Trata-se agora de explicitar estas regras, de precisar as convenções, de dizer porquê tal escrita matemática é correcta e porquê ela é pertinente. É o objecto da validação explícita.

É certo que a dialéctica da acção trás uma validação empírica, e implícita, dos modelos de acção ou das formulações construídas, mas esta validação é insuficiente. A convicção deve concretizar-se numa asserção, uma afirmação, que permitirá ao pensamento apoiar-se para construir novas asserções ou novas provas.

Fazer matemática não consiste unicamente em emitir ou receber informações em linguagem matemática, mesmo que se compreendam.

A criança "matemática" deve tomar perante os modelos que construir uma atitude crítica.

Deve ligar estes modelos entre si.

Deve poder construir explicitamente uma estrutura usual a partir de outras que já conheça, explicitar os teoremas...; qualificaremos esta validação de sintática porque não faz apelo senão aos próprios modelos.

Deve por outro lado explicitar o valor de um modelo numa situação dada, dar-se conta das contradições ou precisar o seu domínio de concretização. É a validação semântica.

b) Uso de uma mensagem como modelo

Tendo uma criança em seu poder uma mensagem escrita pode ela própria estabelecer as relações "significante-significado" com os elementos da situação. Pode substituir pelo estudo da mensagem o da situação, e, graças a isso, obter mais facilmente previsões úteis. É nesse momento que faz da mensagem um modelo.

A figura junta (pag. 12) mostra de modo esquemático os diferentes papéis que a formulação pode desempenhar na acção:

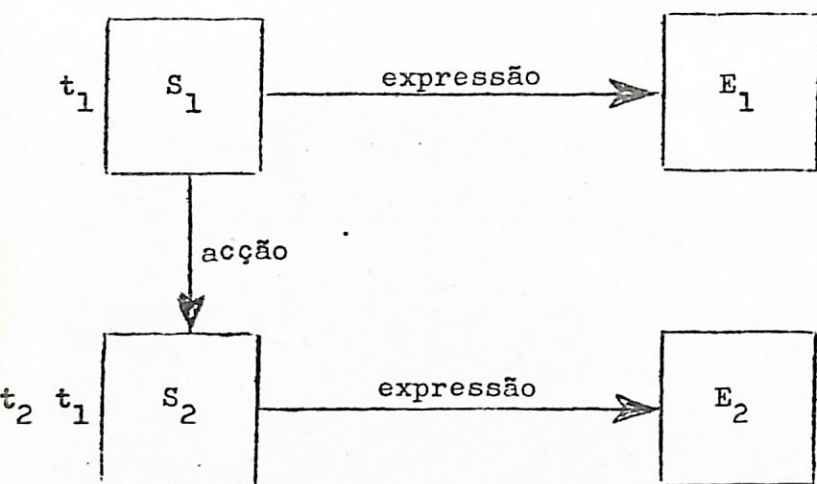
Em I, a linguagem só serve para descrever a situação, para a exprimir. O esquema é o das aprendizagens por associações repetidas de uma formulação a uma acção.

Em II, a linguagem é o meio de comunicar a alguém a situação que deve organizar. Deve realizar ou concretizar o que está enunciado na mensagem, fazer uma construção efectiva, depois codificar a nova situação obtida e transmitir esta nova mensagem.

Este esquema é o da verificação; é empregado na aprendizagem de agrupamentos de asserções, por associações repetidas com uma construção concreta; é o esquema da prova semântica destes agrupamentos. É utilizado frequentemente com a esperança que acções $M_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow M_2$, repetidas traduzirão por abstracção uma passagem $M_1 \rightarrow M_2$ mais económica em tempo ou em esforços.

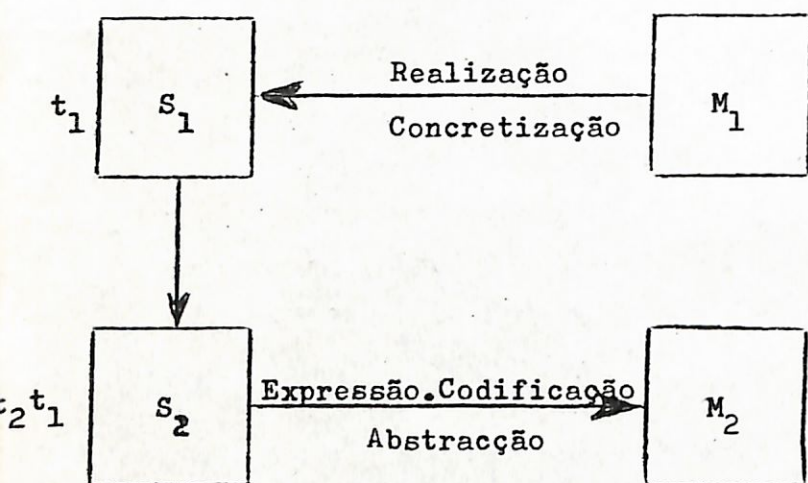
Em III, a linguagem é utilizada como meio de obter ensinamentos sobre S_2 que teria sido penoso e impossível pôr directamente em evidência por construção: a criança codifica a situação S_1 segundo o modelo abstracto M_1 , e raciocina segundo as regras internas de M_1 , obtem M_2 , e concretiza a conclusão predizendo S_2 ou realizando a acção assim prevista. É o esquema dos algoritmos ou da matematização. A criança que opera segundo este esquema, a menos que aplique sómente um algoritmo, deve conhecer de modo explícito a justificação da escolha do modelo e a das suas regras. É preciso entender por justificação explícita, ao mesmo tempo, a que se refere à convicção profunda e à convenção social. O processo de matematização visa um uso conveniente deste esquema e o ensino das matemáticas consistirá em organizar as relações da criança nas diversas situações com o mundo que a rodeia de modo a obter a geração e o emprego segundo este esquema dos modelos matemáticos. A utilidade dos modelos e a confiança que lhe atribue a criança é um factor muito conhecido favorável ao seu conhecimento. Daremos vários exemplos desta organização em (9) e em "documentos para a formação de professores" e em particular a definição e o estudo das somas de cardinais e as propriedades da adição de naturais.

... / ...



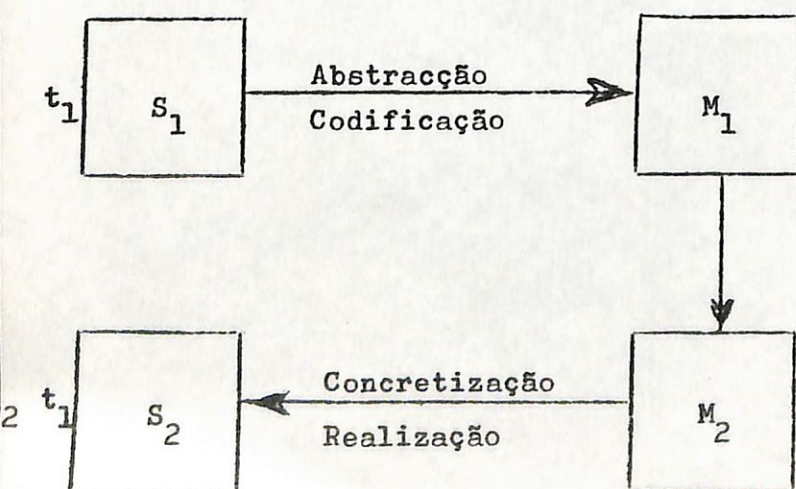
I

Acção e expressão



II

Prova semântica
(verificação)



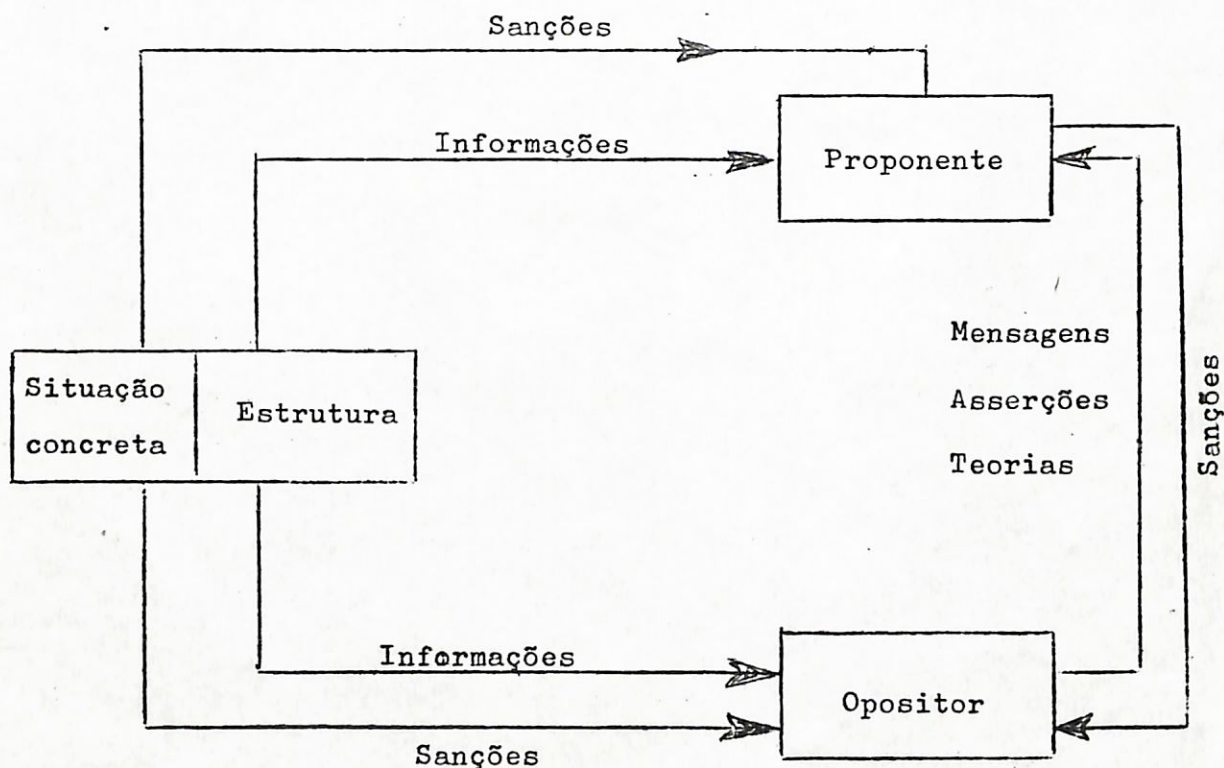
III

Uso de um algoritmo.
Matematização.
Prova sintática

c) Esquema pedagógico da validação

A criança poderá talvez, neste momento, tomar sozinho consciência da representação que existe entre a mensagem e a situação assim como do valor predictivo da sua formalização. Mas ele o fará muito melhor e mais facilmente numa situação pedagógica onde deverá afirmar ou negar o valor da mensagem. Este esquema é comparável ao esquema da comunicação.

A criança está na posição do proponente. A situação de que ele se ocupa é um modelo matemático, quer dizer um par: situação "concreta" - estrutura matemática. Deve justificar, defender a sua formulação e então emitir asserções e já não informações, em intenção a um "opositor".



Teorias matemáticas ou lógicas

Esquema pedagógico da validação explícita

As sanções são organizadas de modo tal que cada um tenha efectivamente interesse em desempenhar o seu papel: a adequação do modelo à situação satisfará um dos sujeitos enquanto que o outro ficará satisfeito no caso contrário. O jogo da descoberta é um exemplo um pouco formal mas muito eficaz de uma situação deste género. A propósito da adição de inteiros

ou dos poliedros, chega-se a uma axiomatização da situação.

A dialéctica da validação estabelecer-se-á muitas vezes na ocasião da organização de jogos de estratégia, opondo pequenos grupos numa competição desportiva.

A formulação da estratégia aparece no interior de uma mesma equipa, se o esquema está conforme ao esquema da formulação, quer dizer se aquele que encontra a estratégia não pode pôr-se no lugar daquele que a deve aplicar.

No jogo da descoberta, sendo reconhecida a existência de uma estratégia eficaz, aquela é proposta (para um ganho superior), ou então ela é adivinhada pelos adversários se a proposição tarda demasiado. O opositor procura provar a falsidade da asserção. Uma descoberta aceite por todos pode ser utilizada para agir ou para provar outra coisa.

d) Dialéctica da validação

As regras de aceitação de uma proposição pelo opositor podem ser admitidas ou conhecidas implicitamente por aquele, ou então expressamente declaradas pelo proponente. Este será conduzido a explicar, a justificar uma asserção não admitida pelo seu interlocutor num sistema de referência. É muitas vezes aquele que perde que quer explicar porque perdeu.

No decurso das sucessivas trocas de mensagens, as crianças são levadas, se o podem fazer, a explicitar uma parte do reportário lógico e matemático de que se servem para estabelecer a sua convicção.

No decurso destas trocas pode observar-se fases de análise do sistema de referência : uma asserção recusada é comentada, decomposta numa sucessão de asserções mais plausíveis. Se as regras desta decomposição são regras matemáticas, o discurso é uma demonstração.

Noutros momentos observe-se uma "complexificação" ou, ao contrário uma simplificação do sistema de referência; exemplo: tendo a definição de adição permitido a escrita de novos números de várias maneiras, foi preciso escrever igualdades que as traduzissem.

No jogo da descoberta *, as crianças preenchem o quadro destas igualdades até ao momento em que é necessário suprimir as que podem ser

*) Caderno para "L' Enseignement élémentaire des mathématiques
de 1' I.R.E.M. de Bordeaux - nº 5

deduzidas de outras, já escritas. Noutros momentos ainda observam-se processos de redução de cadeias de proposições primeiro por uso implícito, depois explícito, de teoremas e de definições. Este processo de redução assemelha-se àquele que é usado ao nível da própria formalização.

e) Resultado : teorias matemáticas

Deste modo, no decorrer da dialética da validação, as crianças elaboram e explicitam uma ou mais teorias matemáticas, axiomatizadas de maneiras diferentes segundo a sua idade e as situações com as quais se defrontaram.

É evidente que as situações escolhidas como as relações que se estabelecem entre elas e o pequeno grupo de jovens matemáticos, desempenham um papel muito importante nesta elaboração. Porque o modelo mental da dedução lógica deverá ser diferenciado progressivamente de modelos vizinhos que se está longe de distinguir no vocabulário corrente e que por vezes se aplicam nas mesmas situações:

- Concordância ou concomitância, associação estatística de duas asserções (elas são frequentemente verdadeiras, mas não mais do que isso nas mesmas situações).

- Associação de ideias comuns : são pronunciadas muitas vezes na mesma situação.

- Causalidade determinista: A_1 é causa de A_2 se A_1 precede A_2 e se em caso algum A_2 se produz sem que se tenha produzido A_1 . Dito de outro modo A_1 implica A_2 (semanticamente).

- Associação de situações por analogia: a associação é fecunda, mas o raciocínio por analogia é logicamente sem fundamento:

Por exemplo:

No exemplo E_1 fizemos ou concluímos C

No exemplo E_2 fizemos ou concluímos C

No exemplo E_3 fizemos ou concluímos C

"então" em E_{n+1} faremos ou concluiremos C.

Quantas aprendizagens são baseadas neste modelo perigoso, repetido ainda por cima, com uma sanção terrível: aquele que não pensa em concluir C é declarado "não inteligente"...

É evidente que a criança pode implicitamente, como qualquer adulto, aplicar os seus modelos ou as suas proposições a variados conjuntos de

valores: conjuntos de dois valores {verdadeiro, falso}, de três valores {verdadeiro, falso, não sei} ou ainda com mais {certo, provavelmente verdadeiro, não sei, provavelmente falso, certamente falso}. Estes conjuntos podem ser utilizados concorrentemente numa mesma situação, em particular nos jogos de estratégia onde as conjecturas se misturam com autênticas deduções.

Nesta criação do pensamento matemático, a explicitação dos sistemas de validação e a procura de formulações convenientes pode fazer ganhar muito tempo.

f) Variantes do esquema pedagógico. O papel do professor

A criança deve construir ela própria a sua convicção. Não é possível demonstrar o que quer que seja a uma criança que não possua a noção de dedução. O uso do reportário do destinatário é uma condição bem conhecida da comunicação.

No esquema de validação, se o proponente ou o opositor é o próprio professor, é de temer que a convicção construída pela criança seja da mesma espécie que uma convicção moral, ou estética, e não se distinga delas.

É importante, essencial, que a ponderação psicológica de uma tautologia seja de uma outra natureza. Nenhuma consideração não matemática deve intervir no juízo da criança. Mais do que em outro caso, quando se trata de construir a noção de verdade, a aprendizagem não serve para nada, o professor deve então apagar-se absolutamente perante os esforços da criança ainda que sejam desajeitados, deve ser exigente sobre a qualidade das convicções e das provas; isto quer dizer, não que vá rejeitar tudo o que não for uma boa prova, mas que vá tomar em consideração as tentativas a este respeito, encorajar a criança a pôr-se perante as situações como um matemático, como um construtor de modelos, depois como "lógico", como adulto.

Em matéria de matemática, o erro é traumatizante e a aprendizagem degradante se forem entendidos uma relação falseada. Neste domínio, o uso considerado pelo professor dos seus conhecimentos técnicos tem muitas vezes o efeito mais deplorável.

Talvez os matemáticos tenham sido crianças que um dia descobriram que raciocinavam mais depressa e melhor que o seu professor e que tenham tido confiança neles próprios.

É por isso que o mestre deve organizar o processo de matematização e de validação pelas crianças entre elas; mas é preciso não esperar

que o método de redescoberta, mesmo numa pequena sociedade onde as relações seriam tais que a descoberta de um ou dois seria depressa utilizada por todos, permita às crianças reconstruir a matemática. A boa linguagem, a boa técnica, a formulação cômoda, o modelo interessante, a teoria útil são o fruto de múltiplas pesquisas e de circunstâncias de probabilidade por vezes fraca. Não é necessário organizar todas as aquisições sob a forma de uma construção; certas demonstrações são num dado momento impossíveis.

O professor ajuda a criança a ultrapassar as dificuldades menores. Há no entanto impossibilidades absolutas: por exemplo, nenhum raciocínio incidindo sobre a noção de infinito pode ser formulado a propósito de problemas concretos. Tudo isto explica a complexidade do ensino da matemática e das escolhas que ele exige.

porto, 25 de Junho de 1978

Tradução de

Dulce Ruivo